Natur und mathematisches Erkennen

Vorlesung

von

Prof. Hilbert.

Ausgearbeitet von P. Bernays.

Erster Teil: Die übliche Auffassung von der Mathematik und ihre Widerlegung

Die Rolle von Anschauung und Erfahrung

Wenn wir den ganzen Bereich derjenigen Wissenschaften überblicken, die auf der Betrachtung der leblosen Natur beruhen, dann werden wir vor allem zu denken haben an alle die Tatsachen, die Ergebnisse und Begriffsbildungen, welche den Gebieten der Mathematik, Physik, Chemie, Astronomie, der beschreibenden Naturwissenschaften und der Technik angehören.

Dieser Bereich des Wissens ist ein ganz enorm großer. Er grenzt sich gut ab gegenüber dem biologischen Wissen und demjenigen, welches den Menschen als solchen betrifft. Als die charakteristischen Merkmale, durch welche dieses Wissen ausgezeichnet ist, kann man folgende anführen: Erstens ist es älter als die anderen Wissenschaften und daher auch entwickelter, zweitens sind die darin enthaltenen Ergebnisse im großen und ganzen sicherer und damit hängt drittens zusammen, dass sie systematischer geordnet sind.[1]

Es scheint mir daher eine Beschäftigung mit diesem Bereich der Wissenschaft, welchen man ja als die exakte Wissenschaft zu bezeichnen pflegt, besonders wichtig zu sein. Wer innerhalb dieses Gebietes ein Fachstudium betreibt, kommt meist nur dazu, einen kleinen Teil davon kennen zu lernen, und da ist es ein Bedürfnis, dass bei dieser Detailforschung der Überblick über das Ganze nicht verloren gehe. Auch ist es ja überhaupt für einen jeden wünschenswert,
2 einen Einblick in die Werkstätte des exakten Forschers zu bekommen und die

[1] In his Copenhagen lecture Hilbert emphasized the role of mathematics for these exact sciences: „ist doch tatsächlich dieser physikalische Wissenskomplex überall mit mathematischen Ideenbildungen und Denkmethoden durchwebt und die heutige Höhe der Entwicklung in diesen Gebieten ist ohne Mathematik undenkbar“ (Hilbert 2009, 382).

allgemeinen Gesichtspunkte zum Verständnis der Methode und der Bedeutung exakter Wissenschaft zu gewinnen.

Es ist natürlich nicht möglich, im Rahmen einer Vorlesung den gesamten hier in Betracht kommenden Fragenkreis erschöpfend zu behandeln: Wir müssen vielmehr eine beschränkende Auswahl treffen. Ein regulierendes Prinzip für diese Auswahl finden wir in dem Gedanken, dass es eine der höchsten Aufgaben für die Philosophie ist, die Fragen zu untersuchen, wie Wissen zustandekommt, was Wissen ist und bezweckt. Im Hinblick auf diese Fragen will ich den Stoff behandeln. Meine Vorlesung soll also eine Art Vorbereitung für eine Erkenntnistheorie bilden. Dazu bedarf es, dass wir Kenntnis nehmen von den verschiedenen Sorten der Erkenntnis, sowohl von den scheinbar trivialsten Wahrheiten wie von den jüngsten Ergebnissen wissenschaftlicher Forschung. Entscheidend für die Berücksichtigung der einzelnen Tatsachen soll für uns sein, inwieweit sie beitragen zur Gewinnung einer befriedigenden Einsicht in das Wesen der Erkenntnis selbst.

Die Art der Vorführung wird anders sein als in anderen Vorlesungen; insbesondere kann die Anordnung nicht nach der Schwierigkeit und nicht nach Fächern stattfinden. (Das Wissen als solches kennt keine Fächer.)

Unsere Erörterung der Denkmethoden der exakten Wissenschaften werden wir naturgemäß mit der Betrachtung der Mathematik beginnen. Wir werden eine Orientierung über unser Thema anhand der Mathematik versuchen.

Dieser Vorsatz bedeutet auch keine Neuerung; die Philosophen sind bereits in dieser Weise verfahren. Ich erinnere an Plato und Kant. Seit den Zeiten Kants hat sich nun ein ungeheures Material an Untersuchungen über die Prinzipien der Mathematik angehäuft. Wir können daher unsere Überlegungen mit weit größerem Erfolge durchführen.[2]

Ich beginne damit, die nahe liegende und verbreitete populäre Meinung über Mathematik und mathematisches Denken wiederzugeben. Diese lässt sich so aussprechen: "Die mathematischen Wahrheiten sind absolut sicher; denn sie werden auf Grund von Definitionen durch untrügliche Schlüsse bewiesen. Sie müssen daher auch überall in der Wirklichkeit stimmen; und das tun sie auch."

Hiernach wäre die Mathematik streng genommen nur eine ungeheure Tautologie. Alle Sätze würden—wie es Poincaré formuliert hat—nichts anderes lehren als auf Umwegen zu sagen, dass $a = a$ ist.[3] In philosophischer Sprache können wir dafür sagen, dass die Urteile der Mathematik analytische Urteile sind.

Um zu erläutern, wie dies zu verstehen ist, nehme ich als Beispiel den Satz

$$2 + 2 = 4.$$

Um diesen zu beweisen, definiere ich, was 2, was 3, und was 4 ist, durch die Gleichungen:

$$1 + 1 = 2, \quad 2 + 1 = 3, \quad 3 + 1 = 4.$$

[2]Hilbert mainly took issue with Kant regarding his views on the epistemological status of time and space, while accepting the role of the a priori in mathematical knowledge, see (Hilbert 2009, 424-426).

[3]Poincaré discussed this topic in (Poincaré 1905, 3-4), where he used precisely the same

Ferner erkläre ich, was "+2" bedeutet durch die Gleichung

$$x + 2 = (x + 1) + 1.$$

Nun kann ich so schließen:

$$2 + 2 = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4.$$

Die mathematische Sätze sind hiernach eigentlich Selbstverständlichkeiten: Andererseits sind sie doch wegen der ihnen innewohnenden absoluten Wahrheit sehr wertvoll und wegen ihrer Anwendbarkeit auf die Wirklichkeit sehr bedeutsam; und es findet auf diesem Gebiet eine vollständige Harmonie zwischen Denken und Sein statt.

Trotz der Selbstverständlichkeit der mathematischen Urteile gibt es übrigens, wie Sie wissen, in der Mathematik sehr schwierige Probleme. Ich nenne als Beispiele folgende beiden ungelösten Fragen:

Ist die Gleichung $p - q = 2$ auf unendlich viele Weisen durch Primzahlen p, q lösbar?

Ist $2^{\sqrt{2}}$ eine irrationale Zahl?[4]

Nun fällt uns aber bei näherem Zusehen eine ganze Reihe von Gedanken ein, die uns an der dargelegten Auffassung von der Mathematik stutzig machen. Diese Überlegungen verdichten sich zu strengen Einwendungen, und so werden wir dazu geführt, diese Auffassung von der Mathematik wesentlich zu modifizieren. Und zwar sind es drei Gesichtspunkte, von denen aus die Modifikation zu erfolgen hat.

Die erste Bemerkung, die wir zu machen haben, betrifft folgendes. Wäre die dargelegte Ansicht zutreffend, so müsste die Mathematik nichts anderes als eine Anhäufung von übereinander getürmten logischen Schlüssen sein. Es müsste ein wahlloses Aneinanderreihen von Folgerungen stattfinden, bei welchem das logische Schließen allein die treibende Kraft wäre. Von einer solchen Willkür ist aber tatsächlich keine Rede; vielmehr zeigt sich, dass die Begriffsbildungen in der Mathematik beständig durch Anschauung und Erfahrung geleitet werden, so dass im großen und ganzen die Mathematik ein willkürfreies, geschlossenes Gebilde darstellt.

Die Beispiele hierfür sind sehr mannigfaltig. Ich will hier des Näheren das Beispiel der *Begriffsbildung des Kontinuums* behandeln.

Der Begriff des Kontinuums geht aus von der Vorstellung des Fließens, der allmählichen (stetigen) Änderung. Das einfachste anschauliche Bild des Kontinuums ist eine Linie. Wie sich nun aus dieser anschaulichen Vorstellung der mathematische Begriff des Kontinuums entwickelt, wollen wir jetzt genauer betrachten, indem wir die einzelnen Etappen dieser Entwicklung feststellen.

Wir betrachten eine stetige Reihe von Wahrnehmungen, die etwa in der Weise erzeugt werden, dass man mit einer Nadelspitze auf der Haut entlang

---

example given by Hilbert here,noting that this argument was first made by Leibniz.

[4]These and other related questions in number theory were the topics of Hilbert's seventh and eighth Paris problem.

fährt.[5] Ist die Verschiebung der Nadelspitze genügend klein, so merkt man keinen Unterschied zwischen Anfangs- und Endstellung dieser Verschiebung. Die allmähliche Änderung ist für die Wahrnehmung also dadurch gekennzeichnet, dass in der zeitlichen Aufeinanderfolge zwischen zwei merklich verschiedenen Stellungen A und C der Nadelspitze sich Stellungen B befinden,[6] die sich dem

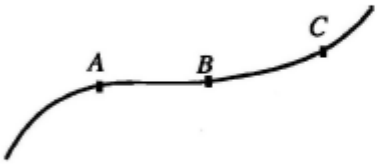

Figure 3.1: figure 1

Gefühl nach weder von A noch von C unterscheiden. Soweit wir uns also nur an die Empfindung halten, würde sich der Sachverhalt schematisch durch die Formeln:

$$A = B, \quad B = C, \quad A \neq C$$

ausdrücken lassen.

Diese Formeln enthalten aber nach den Gesetzen der Mathematik einen Widerspruch. Um ihn zu lösen, können wir den Gesichtssinn zu Hilfe nehmen und ihn dabei, falls er allein nicht ausreicht, noch durch ein Vergrößerungsglas unterstützen. Dadurch können wir erreichen, dass die Stellung B wenigstens von einer der beiden Stellungen A und C unterschieden werden kann, so dass der Befund der Wahrnehmungen nicht mehr den Gleichungen $A = B$, $B = C$ entspricht. Der Widerspruch wird damit in der Tat aufgehoben.

Nehmen wir nun an, es sei A als verschieden von B festgestellt; dann werden, da ja die Bewegung der Nadel eine allmähliche sein soll, zwischen A und B jedenfalls noch Stellen beobachtet. Für die Unterscheidung solcher Stellen besteht aber wiederum eine Grenze der Genauigkeit, und so tritt abermals der Widerspruch auf, sobald wir die Stellungen der Nadel, die wir nicht mehr unterscheiden können, als gleich betrachten.

So werden wir dazu gezwungen, immer feinere Hilfsmittel der Beobachtung anzuwenden und in der Reihe der Punkte, durch die wir die stetige Bewegung der Nadel darstellen, immer weitere Punkte einzuschalten, so dass wir schließlich dazu geführt werden, auf die Linie unendlich viele Punkte anzunehmen.

Auch noch durch eine andere, prinzipiell wichtige Betrachtung werden wir zu dem Ergebnis geführt, dass das Kontinuum aus unendlich vielen Punkten besteht.

Nehmen wir als Darstellung des Kontinuums eine Strecke. Die Hälfte einer solchen, durch eine Lupe gesehen, die im Verhältnis 2 : 1 vergrößert, sieht genau so aus wie die ganze Strecke, mit bloßem Auge betrachtet, d. h. es besteht kein grundsätzlicher Unterschied zwischen der ganzen Strecke und ihrer Hälfte.

[5]This example appears in (Poincaré 1905, 22) with an allusion to the physiological researches of G. T. Fechner.

[6]Poincaré discussed this

Wenn wir nun dies mathematisch ausdrücken wollen, dass die Hälfte gleich beschaffen ist wie das Ganze, so sind wir bereits genötigt, unendlich viele Punkte auf der Strecke anzunehmen. Denn bei einer endlichen Gesamtheit von Dingen lässt sich niemals ein Teil auf das Ganze umkehrbar eindeutig abbilden. Hierin besteht das klassische durchschlagende Kriterium der Endlichkeit: Der Teil ist nie gleich dem Ganzen.[7] Erst bei unendlichen Gesamtheiten ist die umkehrbar eindeutige Abbildung des Ganzen auf einen Teil möglich.[8] Ein Beispiel einer solchen Abbildung ist die Zuordnung aller ganzen Zahlen zu den geraden Zahlen. Man erhält nämlich eine umkehrbar eindeutige Beziehung, indem man jeder Zahl n ihr Doppeltes, $2n$ zuordnet; in diesem Sinne gibt es also ebenso viel gerade Zahlen, wie es überhaupt ganze Zahlen gibt.[a]

Durch die Methode der unbegrenzt fortgesetzten Einschaltung von Punkten werden wir zu einem *mathematischen Kontinuum "erster Art"* geführt, das arithmetisch durch das System der rationalen Zahlen m/n repräsentiert wird, in welchem ja zwischen zwei verschiedenen Zahlen immer noch weitere Zahlen liegen.

Mit dem Kontinuum erster Art kommen wir nun aber für die Zwecke der begrifflichen Präzisierung der Stetigkeitsvorstellung noch nicht aus.

Denken wir etwa an die analytische Geometrie der Ebene. Wollten wir hier unter Zugrundelegung der gewöhnlichen rechtwinkligen Parallelkoordinaten nur Punkte mit rationalen Koordinaten als existierend annehmen, so würden wir mit der Anschauung in Widerstreit geraten. Dies zeigt sich an einfachen Beispielen.[9]

Gemäß unserer anschaulichen Vorstellung von einer stetigen Linie muss eine Gerade, die aus dem Innern eines Kreises ins Äußere führt, den Kreis wenigstens einmal schneiden. Danach muss also die durch die Gleichung $y = x$ dargestellte Gerade, welche den Nullpunkt mit dem Punkt $(1, 1)$ verbindet, mit dem Einheitskreis (d. h. dem Kreis mit dem Radius 1 um den Nullpunkt), dessen Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ ist, einen Schnittpunkt haben.

Dies würden wir aber nicht zugeben können, wenn wir nur Punkte mit rationalen Koordinaten als existierend gelten lassen. Nach dieser Auffassung gibt es keinen Schnittpunkt der Geraden $y = x$ mit dem Einheitskreis. Denn für einen solchen müssten die Koordinaten gleichzeitig den Bedingungen

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{und} \quad y = x$$

[7] Common Notion 5 in Euclid states that "The whole is greater than the part." Heath, following Tannery, thought this axiom was a later interpolation (Heath 1925, 232). He also discussed at length how Hilbert's axiom system enabled the geometer to circumvent the problems Euclid encountered when trying to prove I.5 (equality of the base angles of an isosceles triangle). Euclid resorted to an argument in I.4 (ASA for congruence of two triangles) that used a deformation-free transposition of one triangle onto another; see (Heath 1925, 229-231).

[8] In the „First Day" of his *Discorsi*, Galileo had already noted this fundamental fact while discussing properties of a physical continuum.

[9] See (Dedekind 1872, ?).

[a] Hilbert added the remark: "Auf der Nichtachtung dieser Tatsache beruht sogar ein berühmter Irrtum von Euklid, indem er als selbstverständlich annimmt, dass der Teil eines Dreiecks kleiner als das ganze Dreieck ist—eine Lücke, die erst in neuerer Zeit (in meinen "Grundlagen") ausgefüllt worden ist."

genügen, sie müssten also die Werte

$$x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

haben; aber diese sind ja nicht rational. So würden wir also zu dem Schlusse

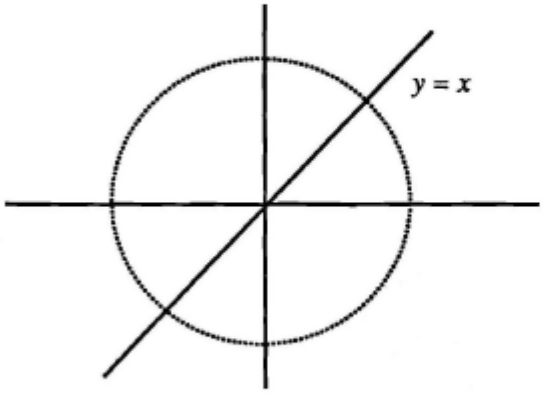

Figure 3.2: figure 2

genötigt, dass auf der Geraden $y = x$ kein Punkt im Abstande 1 vom Nullpunkt existiert. Hierdurch kämen wir nicht nur mit der anschaulichen Vorstellung in Widerspruch, sondern auch mit der Elementargeometrie. Denn es ist ja eine der ersten Voraussetzungen der elementaren Geometrie, dass eine gegebene Strecke (im vorliegenden Falle die Einheitsstrecke) von einem gegebenen Punkt aus auf eine gegebene Gerade abgetragen werden kann.

Wir dürfen also bei dem Kontinuum erster Art nicht stehen bleiben, sondern müssen das System der Zahlen erweitern. Bei dem betrachteten Beispiel würde die Hinzufügung der Zahl $\sqrt{2}$ (und der durch die elementaren Rechenoperationen aus $\sqrt{2}$ zu gewinnenden Zahlen) zur Beseitigung der Schwierigkeit ausreichen. Um aber alle derartigen Fälle mit einem Schlage zu erledigen, bedarf es eines neuen allgemeinen Prinzips der Zwischenschaltung. Ein solches liefert uns das *Dedekindsche Schnittverfahren*, welches in folgendem besteht.[10]

Man betrachtet diejenigen Einteilungen aller rationalen Zahlen in zwei Klassen K und G, bei denen jede Zahl aus K kleiner ist als jede Zahl aus G. Von derartigen Einteilungen gibt es drei typische Fälle, wie sie durch folgende Beispiele dargestellt werden:

1) K bestehe aus den Zahlen, die ≤ 2 sind, G aus denen, welche > 2 sind.

2) K bestehe aus den Zahlen, die < 2 sind, G aus denen, die ≥ 2 sind.

3) K bestehe aus den Zahlen, deren Quadrat < 2 ist, G aus den Zahlen, deren Quadrat > 2 ist.

[10]See (Dedekind 1872); Poincaré discusses Dedekind's method of cuts as well, though the translator changed mistakenly changed his name to Kronecker (sic!) in (Poincaré 1905, 20-21).

Bei dem ersten Fall enthält die Klasse K eine größte Zahl, nämlich 2, dagegen enthält G keine kleinste Zahl. Beim zweiten Fall enthält K keine größte Zahl, aber G enthält eine kleinste, nämlich wiederum 2. In diesen beiden Fällen erzeugt gewissermaßen die Zahl 2 die Einteilung. Bei dem dritten Beispiel gibt es weder eine größte Zahl in K noch eine kleinste in G. In diesem Falle nun, wo keine rationale Zahl die Einteilung erzeugt, fassen wir die Einteilung selbst als Definition einer "irrationalen" Zahl auf, welche größer ist als alle Zahlen von K und kleiner als alle Zahlen von G.

So verfahren wir nun bei jeder möglichen Einteilung, wo in K keine größte und in G keine kleinste Zahl existiert. Durch dieses neue Prinzip der Zwischenschaltung von Zahlen gelangen wir von dem System der rationalen Zahlen zu dem System der "reellen" Zahlen, welches ein *Kontinuum zweiter Art* darstellt. Auf diesen erweiterten Zahlenbereich lassen sich die Rechenoperationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division derart ausdehnen, dass die gewöhnlichen Rechenregeln alle erhalten bleiben.

Nun fragt es sich, ob der Prozess der Einschaltung von immer neuen Zahlen hiermit ein Ende hat oder ob er noch weiter fortzusetzen ist. Und zwar ist zunächst die Frage, ob ein Weitergehen in der Einschaltung von Zahlen überhaupt logisch möglich ist, ob es insbesondere möglich ist, Zahlen anzunehmen, die zwischen 0 und den sämtlichen Zahlen $1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ (welche sich ja der Null unbegrenzt nähern), gelegen sind.

Dies lässt sich nun in der Tat ganz einwandfrei zeigen.[11] Man kann dazu etwa so verfahren: Man betrachtet als Zahlen die rationalen Funktionen eines Arguments ε mit reellen Koeffizienten:

$$R(\varepsilon) = \frac{a_0 + a_1\varepsilon + \cdots + a_n\varepsilon^n}{b_0 + b_1\varepsilon + \cdots + b_m\varepsilon^m},$$

worunter die bisherigen Zahlen (als Konstanten) mitinbegriffen sind. Dabei setzt man fest, dass eine Zahl $R(\varepsilon)$ positiv heißen soll, wenn die Funktion $R(\varepsilon)$ für alle genügend kleinen, positiven Werte von ε positiv ist. Ferner soll $R(\varepsilon)$ größer als $S(\varepsilon)$ heißen, falls $(R(\varepsilon) - S(\varepsilon))$ eine positive Zahl ist. Danach gilt also bei zwei Zahlen $R(\varepsilon)$, $S(\varepsilon)$ die Ungleichung $R(\varepsilon) > S(\varepsilon)$ oder $R(\varepsilon) < S(\varepsilon)$, je nachdem für hinreichend kleine positive Werte von ε die Differenz $R(\varepsilon) - S(\varepsilon)$ beständig positiv oder beständig negativ ist. Bei diesen Festsetzungen behalten alle Rechengesetze, insbesondere die Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen ihre Gültigkeit. Und wir erhalten somit durch eine ganz korrekte mathematische Begriffsbildung ein Kontinuum dritter Art. Dieses besitzt auch die Eigenschaft, dass es darin Zahlen gibt, die zwischen 0 und sämtlichen Zahlen $1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ liegen. Nämlich ε selbst ist eine solche Zahl. Denn einerseits ist $\varepsilon > 0$, weil ja $\varepsilon - 0$ für jeden positiven Wert von ε positive ist; andererseits ist z. B. $\varepsilon < 1/2$, weil für alle unterhalb von $1/2$ liegenden positiven Werte von ε die Differenz $\varepsilon - 1/2$ negativ ist, und das Entsprechende gilt für die übrigen Zahlen $1/3, 1/4, \ldots$.

Nun hat allerdings diese Konstruktion eines Kontinuums dritter Art noch einen Mangel. Es tritt hier nämlich wieder der Fall ein, dass eine durch den

[11] Hilbert introduced such non-Archimedean number systems in his "Grundlagen der Geo-

Nullpunkt gehende gerade Linie den Einheitskreis nicht schneidet. In der Tat hat die Gerade $x = \varepsilon y$ mit dem Einheitskreise keinen Punkt gemeinsam; denn die gemeinsame Lösung der Gleichungen

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{und} \quad \mathrm{x} = \varepsilon \mathrm{y}$$

ist gegebenen durch

$$x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}},$$

diese Ausdrücke stellen aber keine Zahlen unseres Kontinuums dar.

Doch diesem Übelstand lässt sich abhelfen. Man braucht nur den Bereich der Zahlen etwas weiter zu fassen, indem man sich nicht auf rationale Funktionen von ε beschränkt, sondern alle Ausdrücke der Form

$$a \cdot \varepsilon^r \cdot (1 + a_1\varepsilon^{1/n} + a_2\varepsilon^{2/n} + \dots)$$

zulässt, worin r eine rationale Zahl (mit beliebigem Vorzeichen), n eine positive ganze Zahl bedeutet, die Koeffizienten $a, a_1, a_2, \dots$ reelle Zahlen sind und die Potenzentwicklung $1 + a_1\varepsilon^{1/n} + \dots$ für hinreichend kleine Werte von ε konvergiert.

Hierdurch wird erreicht, dass in der dem Zahlensystem entsprechenden analytischen Geometrie der Ebene alle im Sinne der anschaulichen Stetigkeit vorhandenen Schnittpunkte von Kurven wirklich auch durch Punkte der Koordinatenebene dargestellt werden. So stellen in den angeführten Beispiel die Ausdrücke

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

Zahlen unseres erweiterten Systems dar, weil ja

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$$

in eine Reihe nach Potenzen von ε entwickelbar ist, die für kleine Werte von ε konvergiert. Und durch diese Zahlen als Koordinaten wird ein Schnittpunkt der Geraden mit dem Einheitskreis bestimmt.

Man sieht nun leicht, dass in dem erweiterten Zahlenbereich alle elementaren Rechenoperationen ausführbar sind, auch lässt sich "größer" und "kleiner" in derselben Weise wie vordem einführen. Die Definition ist am einfachsten so zu formulieren: eine Zahl

$$F(\varepsilon) = a\varepsilon^r(1 + a_1\varepsilon^{1/n} + \dots)$$

heißt positiv, wenn der Koeffizient a im gewöhnlichen Sinne positiv ist, und eine Zahl $F(\varepsilon)$ heißt größer als $G(\varepsilon)$, wenn die Differenz $F(\varepsilon) - G(\varepsilon)$ positiv ist.

Hierbei bleiben wiederum die gewöhnlichen Regeln für das Rechnen alle gültig.

---

metrie" (Hilbert 1899, 24-26).

So lässt sich also in einer mathematisch ganz einwandfreien Weise der Übergang zu einem Kontinuum dritter Art vollziehen, wobei man es einrichten kann, dass die bei dem Kontinuum erster Art vorgefundenen Mängel hier nicht wieder auftreten.[12] Sehen wir nun zu, was die Annahme eines Kontinuums dritter Art für Folgen haben würde.

Es gibt einen mathematischen Grundsatz, welchen man als *Archimedische Forderung* bezeichnet. Dieser besagt folgendes: Es sei auf einer Geraden eine Strecke $\overline{AB}$ und ein Punkt P außerhalb der Strecke gegeben. Wenn ich dann die Strecke $\overline{AB}$ hinreichend oft hintereinander in der Richtung nach P hin abtrage, so komme ich jedenfalls einmal über P hinaus. Die Strecke $\overline{AB}$ mag noch so klein sein, und der Punkt P mag noch so weit entfernt liegen (etwa so weit wie der Sirius von der Erde), so wird doch nach einer endlichen Zahl von Abtragungen der Punkt P überschritten.

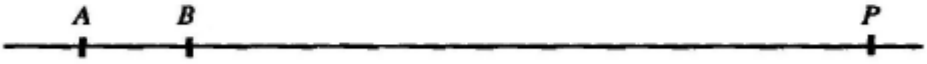

Figure 3.3: figure 3

Dieses Archimedische Postulat ist bei dem Kontinuum dritter Art nicht erfüllt. Denn wählen wir z. B. als Punkte A, B, P die Punkte $0, 1, 1/\varepsilon$ auf der Zahlenachse, so kann der Punkt P durch noch so vielmaliges Abtragen der Einheitsstrecke nicht erreicht werden, weil jede ganze Zahl n kleiner ist als $1/\varepsilon$. (Es gelten ja für alle positiven Werte von ε, die kleiner als $1/n$ sind, die Ungleichungen $n\varepsilon < 1, \quad n < 1/\varepsilon$.) Ebenso ergibt sich auch, dass der Punkt 1 durch noch so vielmaliges Abtragen der Strecke ε vom Nullpunkt aus nicht erreicht werden kann.

Nun werden wir aber diese Forderung ohne zwingenden Anlass nicht preisgeben. Und ein solcher Anlass liegt in unserer Erfahrung auch gar nicht vor, vielmehr besteht die bemerkenswerte Tatsache, dass alle Abstände in der Natur miteinander zahlenmäßig vergleichbar sind. Die größten astronomischen Entfernungen sowie die kleinsten Abstände, wie wir sie bei den Atomen und Elektronen finden, lassen sich alle durch Vielfache und Bruchteile eines Zentimeters ausdrücken.

Daher ist das Kontinuum dritter Art, welches als Zahlensystem in der Mathematik natürlich seine Bedeutung hat, für den Zweck der mathematischen Auffassung des Stetigen abzulehnen, und wir bleiben also bei dem Kontinuum zweiter Art stehen.

[12] Poincaré discussed such an extension of the usual continuum in (Poincaré 1905, 28-30), where he refers to the work of Paul duBois-Reymond.

So sehen wir an dem Beispiel des Kontinuums, wie die mathematische Begriffsbildung durch die Anschauung angeregt und von der Erfahrung geleitet wird.[13] Es ließen sich hierfür noch zahlreiche Beispiele geben. Insbesondere ist zu erwähnen, dass der Anstoß zur Ausbildung der Infinitesimalrechnung von der Geometrie und Mechanik ausgegangen ist, und dass deren weitere Entwicklung durch die Probleme der Naturwissenschaft und der Technik wesentlich mitbestimmt worden ist und noch wird.

Das vorige Mal habe ich auseinander gesetzt, dass entgegen der Ansicht, wonach die Mathematik ganz wahllos ihre Schlüsse anhäuft, die mathematische Wissenschaft im großen und ganzen ein willkürfreies geschlossenes System darstellt. Insbesondere zeigte ich am Beispiel des Kontinuums, wie die Begriffsbildung der Mathematik, indem sie sich an die Anschauung und die Erfahrungstatsachen hält, auf eine ganz bestimmte Weise gelenkt wird, so dass von Willkür gar keine Rede ist. Ich wies auch darauf hin, dass die Anforderungen der Physik und der Technik auf den Entwicklungsgang der Mathematik richtunggebend einwirken.

Zu dieser Lenkung von außen her, welche die Mathematik erfährt, kommt nun aber noch eine innere Tendenz der Mathematik zur Systematik, welche teils in einem bewussten Streben nach logischer Geschlossenheit besteht und teils darauf beruht, dass die Verfolgung der nahe liegenden mathematischen Fragestellungen von selbst zu einer systematischen Ausbildung der Wissenschaft nötigt. Auch bei dem Falle des Kontinuums geschieht es nicht nur im Hinblick auf die Darstellung der räumlichen und physikalischen Verhältnisse, dass wir uns für das Kontinuum zweiter Art entscheiden, sondern es spricht auch ein innerer Grund dafür, welcher der Betrachtungsweise der mathematischen Logik angehört.

Es handelt sich dabei um den Gesichtspunkt der *Vollständigkeit* des Zahlensystems.[14] Ein System von Dingen, zwischen denen gewisse Relationen bestehen, heißt mit Bezug auf bestimmte Eigenschaften dieser Relationen ein vollständiges, wenn es bei Aufrechterhaltung dieser Eigenschaften keiner Erweiterung mehr fähig ist.

Bei dem System der Zahlen des Kontinuums, welche durch die elementaren Rechenoperationen und durch die Beziehung des "größer" und "kleiner" verknüpft sind, halten wir als Eigenschaften jedenfalls die gewöhnlichen Gesetze des Rechnens fest. Dazu kommt noch die Eigenschaft, welche durch die Archimedische Forderung ausgedrückt wird.

Alle diese Eigenschaften besitzt das Kontinuum erster Art, aber es ist in Hinsicht auf diese kein vollständiges System; denn es lässt sich ja zu dem Kontinuum zweiter Art erweitern, bei welchem auch noch die Rechengesetze und die

[13] This line of argument reveals the importance Hilbert attached to the role of empirical knowledge in shaping mathematical concepts. The following year he presented further examples drawn from geometry in his lecture course on Anschauliche Geometrie, later published as (Hilbert and Cohn-Vossen, 1932).

[14] This concept must not be confused with completeness in the topological sense. Hilbert's notion of *Vollständigkeit* might better be translated as „saturated“ since the condition implies such a number system cannot be extended.

Archimedische Forderung erfüllt sind.

Das Kontinuum zweiter Art aber genügt der Vollständigkeitsbedingung.[15] Denn ließe es sich unter Aufrechterhaltung der Rechenregeln und der Archimedischen Forderung zu einem umfassenderen System erweitern, so gäbe es in diesem eine Zahl a, welche nicht zu den reellen Zahlen gehörte. Diese müsste mit allen reellen Zahlen, und insbesondere auch mit allen rationalen Zahlen der Größe nach vergleichbar sein, und zwar könnte sie auf Grund der Archimedischen Forderung nicht kleiner sein als sämtliche rationalen Zahlen und ebenso wenig größer als alle rationalen Zahlen. Daher würde die Einteilung der rationalen Zahlen in solche, die kleiner als a (Klasse K) und solche, die größer als a (Klasse G) sind, einen Dedekindschen Schnitt darstellen. Diesem Schnitte müsste eine reelle Zahl b entsprechen, welche (gleichgültig, ob sie rational oder irrational ist) kleiner oder gleich jeder Zahl von G und größer oder gleich jeder Zahl von K ist. Da nun aber a keine reelle Zahl sein soll, so müsste b von a verschieden sein, und zufolge der Archimedischen Forderung müssten daher zwischen b und a rationale Zahlen liegen. Es wäre demnach entweder b kleiner als gewisse Zahlen aus K oder gar als gewisse Zahlen aus G, und wir kämen also auf einen Widerspruch.

Somit erkennen wir, dass bei Zugrundelegung der gewöhnlichen Rechenregeln sowie der Archimedischen Forderung das Kontinuum zweiter Art durch die Bedingung der Vollständigkeit—welche ich als "Vollständigkeitsaxiom" aufgestellt habe—, eindeutig festgelegt ist.

Eine Erweiterung des Kontinuums zweiter Art bei Festhaltung der üblichen Rechengesetze ist nur dadurch möglich, dass man die Archimedische Forderung fallen lässt, und es ergibt sich hiermit ganz allgemein, dass ein Kontinuum dritter Art der Archimedischen Forderung nicht genügen kann.

Wenn man nun so verfährt, dass man die Archimedische Forderung preisgibt und nur die Rechengesetze als Eigenschaften des Zahlensystems festlegt, dann ist tatsächlich, wie wir gesehen haben, das Kontinuum zweiter Art nicht mehr vollständig sondern vielmehr einer Erweiterung fähig. Man könnte nun denken, dass sich durch Hinzufügung hinreichend vieler Zahlen wiederum ein vollständiges System herstellen ließe. Das ist jedoch nicht der Fall. Man kann nämlich die Methode, mit deren Hilfe wir das Kontinuum zweiter Art erweitert haben, auf jedes System S anwenden, in welchem die Gesetze für die elementaren Rechenoperationen und für die Ungleichheitsbeziehungen gelten. Man betrachtet als Zahlen im weiteren Sinne die rationalen Funktionen eines Arguments w, deren Koeffizienten Zahlen von S sind; eine solche Zahl $R(w)$ nennt man positiv, wenn bei der Entwicklung von $R(w)$ nach steigenden Potenzen von w der erste Koeffizient eine positive Zahl von S ist, und man nennt $R(w)$ größer als $S(w)$, wenn $R(w) - S(w)$ positiv ist. So erhält man ein System, in welchem S als Teilsystem enthalten ist und worin alle Rechenregeln gültig bleiben. Es ist also beim Aufgeben der Archimedischen Forderung nicht mehr möglich, dem Vollständigkeitsaxiom zu genügen. Wir können ein vollständiges Zahlensystem nur in dem Sinne erreichen, dass wir die Erfüllung der Archimedischen Forderung mit zu den charakteristischen Eigenschaften des Zahlensystems rechnen. Tun wir dies

[15] Hilbert here follows the proof first given in (Dedekind 1872).

aber, so werden wir durch die Bedingung der Vollständigkeit gerade zu dem Kontinuum zweiter Art geführt; in diesem findet somit die Zahlenbildung ihren natürlichen Abschluss . Wir sehen also, dass das Kontinuum zweiter Art sowohl gegenüber den engeren wie auch gegenüber den weiteren Zahlensystemen einen inneren Vorzug besitzt, und dass daher auch vom logisch-systematischen Standpunkt ein Grund dafür besteht, bei der Begriffsbildung des Kontinuums gerade bis zu dem Kontinuum zweiter Art zu gehen und bei diesem stehen zubleiben.

Ebenso wie an diesem speziellen Beispiel zeigt sich überhaupt bei einer näheren Betrachtung der mathematischen Theorien, dass die Entwicklung der Mathematik, abgesehen von dem Einfluss, der von den Bedürfnissen der Geometrie und der Physik ausgeht, schon bei der Art, wie sie durch das reine Denken fortschreitet, im wesentlichen eine zwangsläufige ist.

Den Ausgang bilden gewisse nahe liegende Probleme, insbesondere aus der Gleichungstheorie und der Zahlentheorie, auf welche man bei Beschäftigung mit den Zahlen ohne weiteres geführt wird (z. B. die Frage, wann eine ganze Zahl sich als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen lässt). Zur Lösung solcher Probleme sind nun ganz bestimmte Begriffsbildungen und Beweismethoden nötig. Freilich kann ein einzelner Satz oft auf verschiedene Weisen bewiesen werden; aber diese verschiedenen Möglichkeiten des Beweises wird man dann auch zur vollen Klärung der Zusammenhänge alle aufsuchen. Im ganzen ist der Gang der Untersuchungen beinahe eindeutig vorgezeichnet, so dass man keinen wesentlich anderen Weg einschlagen kann als den, welchen die Wissenschaft tatsächlich genommen hat.

Dies gilt nicht nur für die Ausbildung der Schlussweise innerhalb einer Theorie, sondern auch für die Erschließung neuer Gebiete des mathematischen Wissens. Die Entwicklung der Methoden der Infinitesimalrechnung und der Funktionentheorie ist vom Standpunkt des reinen mathematischen Denkens keineswegs zufällig, vielmehr erweisen sich die begrifflichen Konstruktionen und die Schluss weisen der Analysis in dem Fortgang der zahlentheoretischen und algebraischen Untersuchungen als unentbehrliche Hilfsmittel zur Behandlung der Probleme.

So ist für die Probleme, welche sich an die reinen Gleichungen (d. h. Gleichungen der Form $x^n = 1$) knüpfen, die Exponentialfunktion von ausschlaggebender Bedeutung; und bei den höheren zahlentheoretischen Fragen wird es notwendig, die Theorie der elliptischen Funktionen und der elliptischen Modulfunktionen heranzuziehen. Auch die Fragen, welche die Verteilung der Primzahlen betreffen, erfordern zu ihrer Lösung die transzendenten Hilfsmittel der Funktionentheorie.

Es bilden also die verschiedenen vorliegenden mathematischen Disziplinen notwendige Glieder im Aufbau einer systematischen Gedankenentwicklung, welche von einfachen, naturgemäß sich bietenden Fragen anhebend, auf einem durch den Zwang innerer Gründe im wesentlichen vorgezeichneten Wege fortschreitet. Von Willkür ist hier keine Rede. Die Mathematik ist nicht wie ein Spiel, bei dem die Aufgaben durch willkürlich erdachte Regeln bestimmt werden, sondern ein begriffliches System von innerer Notwendigkeit, das nur so und nicht anders sein kann.[16]

[16] These views regarding the convergence of ideas in fundamental mathematical theories can already be found in Hilbert's Paris lecture (Hilbert 1900), in particular his remarks in connection with the thirteenth problem.